سلم تصحيح لامتحان مقرر التحليل العددي
سنة ثالثة رياضيات
الفصل الثاني 2023/2024

س1: باستخدام طريقة التصنيف، حل عدد المعادلة الآتية، الواقع في المجال $[0,1]$ وذلك بدقة $\varepsilon = 0.005$ حيث

$$P(x) = x^3 - 5x^2 + 2x - 1$$

الحل: يوجد حل واحد في المجال المعطى.

تعطى العلامة كاملة لجميع الطلاب

س2: أوجد بطريقة لاغرانج كثيرة الحدود الآتية:

$$P(x) = x^4 - x^3 + x - 2$$

بدلالة $x-1$ ثم أحسب قيمة كثيرة الحدود والمشتقات المتتالية عند $x=1$.

الحل:

	1	-1	0	1	-2
$P(x)$					
$x=1$		1	0	0	1
		1	0	0	1 | $-1 = A_0 = P(1)$
			1	1	1
			1	1	1 | $2 = A_1$
				1	2
				1	2 | $3 = A_2$
					1
					1 | $3 = A_3$
					1 = A_4

$$\Rightarrow P(x) = A_0 + A_1(x-1) + A_2(x-1)^2 + A_3(x-1)^3 + A_4(x-1)^4$$

$$= -1 + 2(x-1) + 3(x-1)^2 + 3(x-1)^3 + (x-1)^4$$

نهاية كثيرة الحدود وقيم المشتقات عند $x=1$

$$P(1) = A_0 = -1$$
$$P'(1) = 1!\,A_1 = 2$$
$$P''(1) = 2!\,A_2 = 2\times 3 = 6$$
$$P'''(1) = 3!\,A_3 = 18$$
$$P^{(4)}(1) = 4!\,A_4 = 24.$$

س3: أوجد كثيرة حدود استيفاء لاغرانج المارة بالنقاط الآتية ثم احسب قيمة كثيرة الحدود عند $x=1$

الحل:

x	0	2	3
y	3	2	6

لدينا ثلاث نقاط وبالتالي $n=2$ أي درجة الحدودية الطلوبة.

$$L_0(x) = \frac{(x-2)(x-3)}{(0-2)(0-3)} = \frac{x^2-5x+6}{6}$$

$$L_1(x) = \frac{(x-0)(x-3)}{(2-0)(2-3)} = \frac{x^2-3x}{-2}$$

$$L_2(x) = \frac{(x-0)(x-2)}{(3-0)(3-2)} = \frac{x^2-2x}{3}$$

$$P(x) = \sum_{k=0}^{2} L_k(x)\cdot y_k$$

$$= 3\left(\frac{x^2-5x+6}{6}\right) + 2\left(\frac{x^2-3x}{-2}\right) + 6\left(\frac{x^2-2x}{3}\right)$$

$$= \frac{x^2-5x+6}{2} - x^2 + 3x + 2x^2 - 4x$$

$$= \frac{3x^2-7x+6}{2}.$$

$$P(1) = \frac{3-7+6}{2} = 1$$

السؤال الثالث: ادرس تقارب طريقة جاكوبي على الجملة الآتية

$$\begin{aligned} -6x+2y-3z &= 5 \\ 3x+7y-2z &= 4 \\ 2x+2y+5z &= 8 \end{aligned}$$

نحصل الجملة باستخدام طريقة جاكوبي وباختيار الحل الصفري $(0,0,0)$ كحل ابتدائي، ونذكر الحل مرتبطاً

الحل: دراسة التقارب

$$\frac{1}{|6|}(|2|+|-3|) = \frac{5}{6}$$

$$\frac{1}{|7|}(|3|+|-2|) = \frac{5}{7}$$

$$\frac{1}{|5|}(|2|+|2|) = \frac{4}{5}$$

$$\Rightarrow \max_i \left(\frac{1}{|a_{ii}|} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}| \right) < 1$$

أي أن الجملة متقاربة، الحل التكراري

$$\begin{aligned} x^{(j+1)} &= \frac{1}{6}[5-2y+3z] \\ y^{(j+1)} &= \frac{1}{7}[4-3x+2z] \\ z^{(j+1)} &= \frac{1}{5}[8-2x-2y] \end{aligned} \Leftarrow$$

الحل الصفري

$$x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

الحل الأول

$$x^{(1)} = \frac{1}{6}[5-0+0] = \frac{5}{6}$$

$$y^{(1)} = \frac{1}{7}[4-0+0] = \frac{4}{7}$$

$$z^{(1)} = \frac{1}{5}[8-0+0] = \frac{8}{5} \rightarrow x^{(1)} = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} \\ \frac{4}{7} \\ \frac{8}{5} \end{pmatrix}$$

الحل الثاني:

$$x^{(2)} = \frac{1}{6}\left[5-2\left(\frac{4}{7}\right)+3\left(\frac{8}{5}\right)\right] = \frac{-175+40-168}{210} = \frac{-101}{70}$$

$$y^{(2)} = \frac{1}{7}\left[4-3\left(\frac{5}{6}\right)+2\left(\frac{8}{5}\right)\right] = \frac{120+75+96}{210} = \frac{97}{70}$$

$$z^{(2)} = \frac{1}{5}\left[8-2\left(\frac{5}{6}\right)-2\left(\frac{4}{7}\right)\right] = \frac{336+70-48}{210} = \frac{179}{105}$$

$$x^{(3)} = \begin{pmatrix} \frac{-101}{70} \\ \frac{97}{70} \\ \frac{179}{105} \end{pmatrix}$$

السؤال الرابع

لدينا التكامل الآتي

$$\int_1^5 4y^3\,dy = 624$$

أوجد قيمة عددية باستخدام

طريقة بارول.

الحل:

لدينا

$$I_4 \simeq \frac{2h}{45}[7y_0+32y_1+12y_2+32y_3+7y_4]$$

$$h = \frac{5-1}{4} = 1$$

$$x_0 = 1 \rightarrow y_0 = 4(1)^3 = 4$$

$$x_1 = 2 \rightarrow y_1 = 4(2)^3 = 32$$

$$x_2 = 3 \rightarrow y_2 = 4(3)^3 = 108$$

$$x_3 = 4 \rightarrow y_3 = 4(4)^3 = 256$$

$$x_4 = 5 \rightarrow y_4 = 4(5)^3 = 500$$

$$\rightarrow I_4 \simeq \frac{2(1)}{45}[7(4)+32(32)+12(108)+32(256)+7(500)]$$

$$= \frac{2}{45}[28+1024+1296+8192+3500]$$

$$= \frac{2\times 14040}{45} = \frac{28080}{45} = 624.$$